

# Imaginärquadratische Einbettung von Maximalordnungen rationaler Quaternionenalgebren, und die nichtzyklischen endlichen Untergruppen der Bianchi-Gruppen

Norbert Krämer

30. Juli 2012

## Zusammenfassung

Sei  $F$  eine rationale Quaternionenalgebra, und sei  $k$  ein imaginärquadratischer Zerfällungskörper von  $F$ . Erweitert man  $F$  zur  $2 \times 2$ -Matrixalgebra über  $k$ , dann lässt sich jede  $F$ -Maximalordnung in eine Maximalordnung dieser Erweiterung einbetten. Wir zeigen, dass alle einbettenden Maximalordnungen isomorph zueinander sind, und dass und wie ihr Isomorphietyp (in Relation zur  $2 \times 2$ -Matrixalgebra über der Hauptordnung von  $k$ ) nur vom Verzweigungsverhalten von  $F$  abhängt (Satz 6.2). Damit können wir ermitteln, ob die Bianchi-Gruppe über der Hauptordnung von  $k$  3-Dieder-, Tetraeder- oder maximalendliche 2-Diedergruppen enthält (Satz 7.1).

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Bezeichnungen</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Spezielle Einbettung rationaler Quaternionenalgebren</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Spezielle Einbettung von Maximalordnungen</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Typisierung der einbettenden Maximalordnungen</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>Die endlichen Untergruppen der Bianchi-Gruppen</b>	<b>13</b>

---

*Mathematics subject classification (2010):*

11S45 Algebras and orders, and their zeta functions  
 11R52 Quaternion and other division algebras: arithmetic, zeta functions  
 11F06 Structure of modular groups and generalizations; arithmetic groups  
 20G07 Structure theory (Linear algebraic groups and related topics)  
 20G30 Linear algebraic groups over global fields and their integers

# 1 Einleitung

Sei  $d \in \mathbb{N}$  quadratfrei, und sei  $\mathfrak{o}$  die Hauptordnung des imaginärquadratischen Zahlkörpers  $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ . Sei  $F$  eine  $\mathbb{Q}$ -Quaternionenalgebra mit Zerfällungskörper  $k$ . Wir untersuchen die Einbettungen  $F \hookrightarrow M_2(k)$  und klären, welche  $M_2(k)$ -Maximalordnungen  $\mathfrak{M}$  dabei als Erweiterung einer  $F$ -Maximalordnung auftreten können: Der Isomorphietyp von  $\mathfrak{M}$  in Relation zu  $M_2(\mathfrak{o})$  hängt nur vom Verzweigungsverhalten von  $F$  ab.

Unser Hauptergebnis ist der nachstehende Satz 6.2. Darin verwenden wir die folgenden Notationen: Für eine Stelle  $p$  von  $\mathbb{Q}$  und  $a, b \in \mathbb{Q}^\times$  bezeichne  $\left(\frac{a, b}{p}\right)$  das Hilbert-Symbol.

Sei  $\left(\frac{F}{p}\right) := +1$  oder  $-1$ , je nachdem, ob  $F$  an der Stelle  $p$  zerlegt oder verzweigt ist.

Sei  $v(F)$  das Produkt der endlichen Verzweigungsstellen von  $F$ , multipliziert mit  $-1$ , falls  $F$  an der Stelle  $\infty$  verzweigt ist.

Schließlich sei  $n(\mathfrak{M}) := N_{k|\mathbb{Q}}(N(\mathfrak{M}M_2(\mathfrak{o})))^{-1}$ . Hierbei ist  $N(\mathfrak{M}M_2(\mathfrak{o}))$  die Norm des Ideals  $\mathfrak{M}M_2(\mathfrak{o})$  und  $N_{k|\mathbb{Q}}(N(\mathfrak{M}M_2(\mathfrak{o})))$  die Absolutnorm des  $\mathfrak{o}$ -Ideals  $N(\mathfrak{M}M_2(\mathfrak{o}))$ .

**Satz 6.2.** *Sei  $d \in \mathbb{N}$  quadratfrei, und sei  $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ . Sei  $F$  eine  $\mathbb{Q}$ -Quaternionenalgebra. Sei  $\mathfrak{F}$  eine  $F$ -Maximalordnung, und sei  $\mathfrak{M}$  eine  $M_2(k)$ -Maximalordnung.*

*Genau dann gibt es eine Einbettung  $f : F \hookrightarrow M_2(k)$  mit  $f(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{M}$ ,*

*wenn  $\left(\frac{v(F)n(\mathfrak{M}), -d}{p}\right) = \left(\frac{F}{p}\right)$  für alle Stellen  $p$  von  $\mathbb{Q}$ .*

Bemerkung: Der Isomorphietyp von  $\mathfrak{M}$  in Relation zu  $M_2(\mathfrak{o})$  wird bekanntlich durch die Gesamtheit der Hilbertsymbole  $\left(\frac{n(\mathfrak{M}), -d}{p}\right)$  charakterisiert (Lemmata 3.3 und 3.4).

Zum Beweis von Satz 6.2 konstruieren wir zuerst spezielle Einbettungen von  $F$  und  $\mathfrak{F}$  (Sätze 4.1 und 5.2). Die generelle Aussage folgt durch Vergleich mit diesen Einbettungen.

Als Anwendung von Satz 6.2 können wir dann klären, welche nichtzyklischen endlichen Untergruppen die Bianchi-Gruppe  $PSL_2(\mathfrak{o}) = SL_2(\mathfrak{o})/\{\pm 1\}$  enthält:

**Satz 7.1.** *Sei  $d \in \mathbb{N}$  quadratfrei, und sei  $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$  mit Hauptordnung  $\mathfrak{o}$ .*

- (i)  *$PSL_2(\mathfrak{o})$  enthält genau dann eine 3-Diedergruppe  $\mathcal{D}_3$ ,  
wenn  $p \equiv 1 \pmod{3}$  für alle Primteiler  $p \neq 3$  von  $d$ .*
- (ii)  *$PSL_2(\mathfrak{o})$  enthält genau dann eine Tetraedergruppe  $\mathcal{T}$ ,  
wenn  $p \equiv 1$  oder  $p \equiv 3 \pmod{8}$  für alle Primteiler  $p \neq 2$  von  $d$ .*
- (iii)  *$PSL_2(\mathfrak{o})$  enthält genau dann eine 2-Diedergruppe  $\mathcal{D}_2$ ,  
aber nicht die Tetraedergruppe  $\mathcal{T}$  mit  $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{T} \subset PSL_2(k)$ ,  
wenn  $p \equiv 1 \pmod{4}$  für alle Primteiler  $p \neq 2$  von  $d$ .*

Es ist bekannt, welche endlichen Untergruppen die Gruppe  $PSL_2(k)$  enthält, und dass es bis auf Isomorphie jeweils höchstens eine  $M_2(k)$ -Maximalordnung gibt, deren projektive Norm-Eins-Gruppe Untergruppen vom Isomorphietyp  $\mathcal{D}_3$ ,  $\mathcal{T}$  oder (maximalendlich)  $\mathcal{D}_2$  enthält (Lemma 3.5 und [5, Sätze 20.39, 20.41, 26.12 und 26.14]).

Aber die Frage, ob die Bianchi-Gruppe  $PSL_2(\mathfrak{o})$  Untergruppen vom Isomorphietyp  $\mathcal{D}_3$ ,  $\mathcal{T}$  oder (maximalendlich)  $\mathcal{D}_2$  enthält, wurde in [5] nur für spezielle  $d$  beantwortet.

Unter Verwendung der Ergebnisse von [5] lassen sich nun für jedes  $d$  die Konjugationsklassenanzahlen der endlichen Untergruppen der Bianchi-Gruppe angeben (in Vorbereitung). Rahm hat in [6] die homologische Torsion und die Farrell-Tate-Kohomologie der Bianchi-Gruppen ermittelt und als Funktion dieser Konjugationsklassenanzahlen ausgedrückt.

Wir beweisen Satz 7.1 durch Zurückführung auf Satz 6.2:

Enthält  $PSL_2(k)$  eine Untergruppe vom Isomorphietyp  $\mathcal{D}_3$  oder  $\mathcal{T}$ , dann erzeugt deren Urbild in  $SL_2(k)$  über  $\mathbb{Q}$  eine Quaternionenalgebra  $F \subset M_2(k)$  und über  $\mathbb{Z}$  eine  $F$ -Maximalordnung  $\mathfrak{F}$ , die sich natürlich in eine  $M_2(k)$ -Maximalordnung  $\mathfrak{M}$  einbetten lässt. Daher führt die Frage  $\mathcal{D}_3 \subset PSL_2(\mathfrak{o})$  bzw.  $\mathcal{T} \subset PSL_2(\mathfrak{o})$  zurück auf die Frage nach dem Isomorphietyp von  $\mathfrak{M}$ , die wir als Spezialfall von Satz 6.2 beantworten können.

Die vom Urbild einer Gruppe  $\mathcal{D}_2 \subset PSL_2(k)$  erzeugte  $F$ -Ordnung ist nicht maximal. Wir nehmen zum Beweis von 7.1.(iii) daher [5, Satz 26.12] zu Hilfe. Dort werden u. a. die Einbettungen von Tetraeder- und 2-Diedergruppen zueinander in Beziehung gesetzt.

Ich danke Alexander D. Rahm für seine Ratschläge und die technische Unterstützung, und Jürgen Rohlf für die kritische Durchsicht des Manuskripts und hilfreiche Vorschläge.

## 2 Bezeichnungen

In einer abelschen Gruppe  $G$  sei  $G^{(2)}$  die Untergruppe der Quadrate. In einem Ring  $R$  mit Eins sei  $R^\times$  die Gruppe der multiplikativ invertierbaren Elemente. Wenn  $R$  kommutativ ist, dann sei  $M_2(R)$  die  $R$ -Algebra der  $2 \times 2$ -Matrizen mit Koeffizienten aus  $R$ .

Für  $z \in \mathbb{C}$  bezeichne  $z \mapsto \bar{z}$  die komplexe Konjugation und  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$  den Absolutbetrag.

Sei im Folgenden stets  $d \in \mathbb{N}$  quadratfrei,  $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d}) \subset \mathbb{C}$  imaginärquadratischer Zahlkörper mit Hauptordnung  $\mathfrak{o}$  und Diskriminante  $D$ . Die Einschränkung der komplexen Konjugation auf  $k$  stimmt mit der nichttrivialen Galois-Involution von  $k/\mathbb{Q}$  überein. Bezeichne  $I$  die Gruppe der  $\mathfrak{o}$ -Ideale und  $H$  die Untergruppe der Hauptideale. Für  $\mathfrak{a} \in I$  sei  $N_{k|\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}) \in \mathbb{Q}^+$  die Absolutnorm bezüglich  $k/\mathbb{Q}$ . Für  $a \in k^\times$  ist dann  $N_{k|\mathbb{Q}}(a\mathfrak{o}) = N_{k|\mathbb{Q}}(a)$ .

Sei  $p$  stets eine Stelle von  $\mathbb{Q}$ , d.h. eine Primzahl  $p \in \mathbb{N}$  oder die unendliche Stelle  $p = \infty$ . Sei  $\mathfrak{p}$  stets eine Stelle von  $k$ , d.h. ein Primideal  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}$  oder die unendliche Stelle  $\mathfrak{p} = \infty$ .

Ist  $p \in \mathbb{N}$  Primzahl, dann ist  $k$  auf natürliche Weise eingebettet in die halbeinfache

quadratische Erweiterung  $k_p = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} k$  von  $\mathbb{Q}_p$ , mit Hauptordnung  $\mathfrak{o}_p = \mathbb{Z}_p \mathfrak{o}$ . Die Galois-Involution  $a \mapsto \bar{a}$  von  $k/\mathbb{Q}$  setzt sich auf natürliche Weise auf  $k_p/\mathbb{Q}_p$  fort. Ist  $p$  verzweigt oder träge in  $\mathfrak{o}$  mit Primteiler  $\mathfrak{p}$ , dann ist auf natürliche Weise  $k_p = k_{\mathfrak{p}}$  und  $\mathfrak{o}_p = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ . Für die jeweils einzige unendliche Stelle von  $\mathbb{Q}$  bzw.  $k$  ist  $\mathbb{Q}_{\infty} = \mathbb{R}$  bzw.  $k_{\infty} = \mathbb{C}$ .

Für eine  $\mathbb{Q}$ -Quaternionenalgebra  $F$  sei  $F_p = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} F$ . Auf natürliche Weise sei  $F$  eingebettet in  $F_p$ . Sei  $\mathbb{Q}$  mit dem Zentrum von  $F$  und  $\mathbb{Q}_p$  mit dem Zentrum von  $F_p$  identifiziert. Für eine Stelle  $\mathfrak{p}$  von  $k$  sei analog  $k \subset M_2(k) \subset M_2(k)_{\mathfrak{p}} = M_2(k_{\mathfrak{p}})$  und  $k_{\mathfrak{p}} \subset M_2(k_{\mathfrak{p}})$ . Betrachte  $p \in \mathbb{N}$ : Für einen  $\mathbb{Z}$ -Modul  $\mathfrak{F} \subset F$  ist dann  $\mathfrak{F}_p = \mathbb{Z}_p \mathfrak{F}$  die lokale Komponente. Für eine endliche Stelle  $\mathfrak{p}$  von  $k$  und einen  $\mathfrak{o}$ -Modul  $\mathfrak{M} \subset M_2(k)$  ist analog  $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{M}$ .

Für ein Element  $M$  einer Quaternionenalgebra  $Q$  bezeichne  $M^*$  das konjugierte Element.  $N(M) = MM^*$  und  $S(M) = M + M^*$  sind dann die Norm und die Spur von  $M$ . In  $Q$  bzw. einer  $Q$ -Maximalordnung  $\mathfrak{M}$  sei  $\Gamma(Q)$  bzw.  $\Gamma(\mathfrak{M})$  die Norm-Eins-Gruppe, und sei  $PG(Q) = \Gamma(Q)/\{\pm 1\}$  bzw.  $PG(\mathfrak{M}) = \Gamma(\mathfrak{M})/\{\pm 1\}$  die projektive Norm-Eins-Gruppe. Speziell ist dann  $PSL_2(\mathfrak{o}) = PG(M_2(\mathfrak{o}))$  die Bianchi-Gruppe.

Ist  $K$  ein algebraischer oder  $\mathfrak{p}$ -adischer Zahlkörper, dann heißen (in dieser Reihenfolge)  $M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22} \in M_2(K) \setminus \{0\}$  Matrizeseinheiten, wenn für alle  $r, s \in \{1, 2\}$  gilt:  $M_{r1}M_{1s} = M_{r2}M_{2s} = M_{rs}$  und  $M_{r1}M_{2s} = M_{r2}M_{1s} = 0$ . Dann ist  $\{M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}\}$  eine Basis von  $M_2(K)$ , und  $\alpha M_{11} + \beta M_{12} + \gamma M_{21} + \delta M_{22}$  mit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$  hat bezüglich der Matrizeseinheiten die Darstellung  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ , mit den bekannten Matrix-Rechenregeln.

Ist  $p \neq 2$  Primzahl und  $a \in \mathbb{Z}$  teilerfremd zu  $p$ , dann sei  $\left(\frac{a}{p}\right)$  das Legendre-Symbol.

Für eine Stelle  $p$  von  $\mathbb{Q}$  und  $a, b \in \mathbb{Q}^{\times}$  sei  $\left(\frac{a, b}{p}\right)$  das Hilbert-Symbol.

Für  $m \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{D}_m$  stets eine  $m$ -Diedergruppe.  $\mathcal{T}$  bezeichne stets eine Tetraedergruppe.  $\mathcal{D}_3$  und  $\mathcal{T}$  sind isomorph zur symmetrischen Gruppe  $\mathcal{S}_3$  bzw. alternierenden Gruppe  $\mathcal{A}_4$ .  $\mathcal{D}_2$  ist Normalteiler in  $\mathcal{T}$  und isomorph zur Kleinschen Vierergruppe  $\mathcal{V}_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

### 3 Grundlagen

**Lemma 3.1.** *Sei  $K$  algebraischer oder  $\mathfrak{p}$ -adischer Zahlkörper.*

*Sei  $Q$  eine  $K$ -Quaternionenalgebra.*

a) *Seien  $A, B \in Q$  mit  $N(A) = N(B)$ ,  $S(A) = S(B)$  und  $S(A)^2 \neq 4N(A)$ .*

*Dann gibt es einen Automorphismus  $j$  von  $Q$  mit  $j(A) = B$ .*

b) *Sei  $j$  ein Automorphismus von  $Q$ .*

*Dann gibt es  $J \in Q^{\times}$  mit  $j(q) = JqJ^{-1}$  für alle  $q \in Q$ .*

c) *Sei  $L$  ein quadratischer Erweiterungskörper von  $K$ .*

*Genau dann ist  $L$  Zerfällungskörper von  $Q$ , wenn es eine Einbettung  $e : L \hookrightarrow Q$  gibt.*

*Beweis.*

- a) Falls  $K[A]$  Körper ist, siehe [2, Teil IV, § 4, Satz 3].  
 Sei also  $K[A]$  kein Körper. Dann zerfällt  $Q$ , lässt sich also als Matrixalgebra  $M_2(K)$  darstellen, und das charakteristische Polynom von  $A$  hat in  $K$  zwei Nullstellen  $a \neq b$ .  
 Nun folgt leicht, dass es  $X, Y \in Q^\times$  gibt mit  $AXX^{-1} = YBY^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ .  
 Mit  $j(q) := Y^{-1}XqX^{-1}Y$  für  $q \in Q$  folgt die Behauptung.
- b) Siehe [2, Teil IV, § 4, Satz 5].
- c) Siehe [2, Teil IV, § 4, Sätze 13 und 17].

□

**Lemma 3.2.** *Sei  $K$  ein  $\mathfrak{p}$ -adischer Zahlkörper mit Hauptordnung  $\mathfrak{O}$ , und sei  $\pi \in \mathfrak{O}$  ein Primelement. Seien  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}'$  zwei  $M_2(K)$ -Maximalordnungen.*

- a) *Dann gibt es Matrizeeinheiten in  $M_2(K)$ , bezüglich derer  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}'$  die Darstellungen  $\begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \pi^{-r}\mathfrak{O} \\ \pi^r\mathfrak{O} & \mathfrak{O} \end{pmatrix}$  haben, mit  $r \in \mathbb{N}_0$ .*
- b) *Sei  $M\mathfrak{M}'M^{-1} \subset \mathfrak{M}$  für ein  $M \in \mathfrak{M}$ ,  $M \notin \pi\mathfrak{M}$ . Dann ist  $N(\mathfrak{M}'\mathfrak{M}) = N(M)^{-1}\mathfrak{O}$ .*

*Beweis.*

- a) Siehe [4, Seite 135, im Beweis von Satz 7].
- b) Da  $M\mathfrak{M}'M^{-1}$  eine  $M_2(K)$ -Maximalordnung ist, gilt  $M\mathfrak{M}'M^{-1} = \mathfrak{M}$ .  
 Bezüglich der Matrizeeinheiten in a) sei  $M' = \begin{pmatrix} \pi^r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Dann ist  $M'\mathfrak{M}'M'^{-1} = \mathfrak{M}$  und  $N(\mathfrak{M}'\mathfrak{M}) = \pi^{-r}\mathfrak{O} = N(M')^{-1}\mathfrak{O}$ . Also ist  $MM'^{-1}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}MM'^{-1}$  ein zweiseitiges  $\mathfrak{M}$ -Ideal. Mit [2, Teil VI, § 11, Satz 13] folgt  $M = \pi^s M'E$  für ein  $s \in \mathbb{Z}$  und  $E \in \mathfrak{M}^\times$ . Wegen  $M, M' \in \mathfrak{M}$  und  $M, M' \notin \pi\mathfrak{M}$  ist  $s = 0$ . Also gilt  $N(M)^{-1}\mathfrak{O} = N(M')^{-1}\mathfrak{O}$ .

□

**Lemma 3.3.** *Sei  $d \in \mathbb{N}$  quadratfrei, und sei  $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$  mit Hauptordnung  $\mathfrak{o}$ , Idealgruppe  $I$  und Hauptidealgruppe  $H$ . Seien  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}'$  zwei  $M_2(k)$ -Maximalordnungen.*

- a) *Dann gilt stets  $N(\mathfrak{M}\mathfrak{M}')N(\mathfrak{M}M_2(\mathfrak{o}))N(\mathfrak{M}'M_2(\mathfrak{o})) \in I^{(2)}$ .*
- b) *Genau dann sind  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}'$  isomorph, wenn  $N(\mathfrak{M}\mathfrak{M}') \in I^{(2)}H$ .*

Bemerkung: Lemma 3.3 ist Spezialfall eines allgemeinen Satzes, siehe etwa [5, Satz 10.9].

*Beweis.* Ist  $\mathfrak{a} \in I$ , dann ist  $\mathfrak{M}\mathfrak{a}$  ein zweiseitiges  $\mathfrak{M}$ -Ideal und  $N(\mathfrak{M}\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^2$ . Ist umgekehrt  $\mathfrak{A}$  ein zweiseitiges  $\mathfrak{M}$ -Ideal, dann ist  $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}\mathfrak{a}$  mit  $\mathfrak{a} \in I$ , siehe [2, Teil VI, § 11, Satz 13].

- a)  $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}\mathfrak{M}'M_2(\mathfrak{o})(\mathfrak{M}M_2(\mathfrak{o}))^{-1}$  ist ein zweiseitiges  $\mathfrak{M}$ -Ideal.  
 Nach [2, Teil VI, § 4, Satz 3 (Normenmultiplikationssatz)] gilt:  
 $N(\mathfrak{M}\mathfrak{M}')N(\mathfrak{M}'M_2(\mathfrak{o})) = N(\mathfrak{M}\mathfrak{M}'M_2(\mathfrak{o})) = N(\mathfrak{A})N(\mathfrak{M}M_2(\mathfrak{o}))$ , also  
 $N(\mathfrak{M}\mathfrak{M}')N(\mathfrak{M}M_2(\mathfrak{o}))N(\mathfrak{M}'M_2(\mathfrak{o})) = N(\mathfrak{A})N(\mathfrak{M}M_2(\mathfrak{o}))^2 \in I^{(2)}$ .
- b) Falls  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}'$  isomorph sind, gibt es ein  $M \in GL_2(k)$  mit  $\mathfrak{M} = M\mathfrak{M}'M^{-1}$ .  
 Dann ist  $\mathfrak{M}M = M\mathfrak{M}'$ , und  $\mathfrak{A} = (\mathfrak{M}\mathfrak{M}')^{-1}M\mathfrak{M}'$  ist ein zweiseitiges  $\mathfrak{M}'$ -Ideal.  
 Also ist dann  $N(\mathfrak{M}\mathfrak{M}') = N(M\mathfrak{M}')N(\mathfrak{A})^{-1} \in I^{(2)}H$ .  
 Falls umgekehrt  $N(\mathfrak{M}\mathfrak{M}') \in I^{(2)}H$ , gibt es ein zweiseitiges  $\mathfrak{M}$ -Ideal  $\mathfrak{A}$  mit  
 $N(\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{M}') = N(\mathfrak{A})N(\mathfrak{M}\mathfrak{M}') \in H$ . Nach [3, Satz 1] gibt es ein  $M \in GL_2(k)$  mit  
 $\mathfrak{A}\mathfrak{M}\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}M$ . Die Rechtsordnung dieses Ideals ist  $\mathfrak{M}' = M^{-1}\mathfrak{M}M$ .

□

**Lemma 3.4.** *Sei  $d \in \mathbb{N}$  quadratfrei, und sei  $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$  mit Hauptordnung  $\mathfrak{o}$ , Idealgruppe  $I$  und Hauptidealgruppe  $H$ . Sei  $\mathfrak{a} \in I$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i)  $\mathfrak{a} \in I^{(2)}H$ .
- (ii) Es gibt  $a \in k^\times$  mit  $N_{k|\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}) = N_{k|\mathbb{Q}}(a)$ .
- (iii)  $\left( \frac{N_{k|\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}), -d}{p} \right) = 1$  für alle Stellen  $p$  von  $\mathbb{Q}$ .

*Beweis.*

- (i)  $\Leftrightarrow$  (ii): Siehe [1, Kapitel III, § 8, Sätze 6 und 7].
- (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii): Siehe [1, Kapitel I, § 7, Satz 1 (Minkowski-Hasse)].

□

Für Rechenregeln zum Hilbert-Symbol siehe [1, Kapitel I, § 5, Formeln (9)-(13), Satz 7].

**Lemma 3.5.** *Sei  $d \in \mathbb{N}$  quadratfrei, und sei  $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ . Jede endliche nichttriviale Untergruppe von  $PSL_2(k)$  ist vom Isomorphietyp  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{D}_3$  (3-Diedergruppe),  $\mathcal{T}$  (Tetraedergruppe) oder  $\mathcal{D}_2$  (2-Diedergruppe).*

*Beweis.* Sei  $G \subset SL_2(k)$  Urbild einer endlichen, nichttrivialen Untergruppe von  $PSL_2(k)$ . Das Urbild  $M \in G$  eines Elements der Ordnung  $m > 1$  hat die Ordnung  $2m$ . Ist  $\zeta \in \mathbb{C}$  eine primitive  $2m$ -te Einheitswurzel, dann ist  $S(M) = \zeta + \bar{\zeta} \in \mathfrak{o} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$ . Daher muss  $m = 2$  oder  $m = 3$  sein. Gemäß [7, Chapter 4.4] ist  $G$  also eine zyklische Gruppe der Ordnung 4 oder 6, oder eine binäre 3-Dieder-, Tetraeder- oder 2-Diedergruppe.

□

## 4 Spezielle Einbettung rationaler Quaternionenalgebren

**Satz 4.1.** Sei  $d \in \mathbb{N}$  quadratfrei, und sei  $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$  mit Hauptordnung  $\mathfrak{o}$  und Diskriminante  $D$ . Sei  $F$  eine  $\mathbb{Q}$ -Quaternionenalgebra mit Zerfällungskörper  $k$ .

- a) Es gibt  $t \in \mathbb{Q}^\times$ , so dass  $F$  isomorph ist zur  $\mathbb{Q}$ -Algebra  $F(t) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ t\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in k \right\}$  mit Basis  $\left\{ 1, U := \begin{pmatrix} i\sqrt{d} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{d} \end{pmatrix}, V(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}, W(t) := \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{d} \\ -ti\sqrt{d} & 0 \end{pmatrix} \right\}$ .
- b)  $F$  und  $F(t)$  sind genau an den Stellen  $p$  von  $\mathbb{Q}$  verzweigt, wo  $\left(\frac{t, -d}{p}\right) = -1$  ist.
- c) Man kann o.B.d.A. annehmen, dass  $t \in \mathbb{Z}$  und quadratfrei ist, dass  $t$  teilerfremd zu  $D$  ist, und dass  $t \equiv 1 \pmod{4}$ , falls  $2 \mid d$ .
- d)  $F(t) \cap M_2(\mathfrak{o}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ t\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathfrak{o} \right\}$  ist eine  $F(t)$ -Ordnung mit Diskriminante  $t^2 D^2 \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Aus  $U^2 = -d$ ,  $V(t)^2 = t$  und  $W(t) = UV(t) = -V(t)U$  folgt zunächst leicht, dass  $F(t)$  eine  $\mathbb{Q}$ -Quaternionenalgebra ist, falls  $t \in \mathbb{Q}^\times$ .

- a) Da  $k$  Zerfällungskörper von  $F$  ist, kann man  $F$  in  $M_2(k)$  und nach Lemma 3.1.c) auch  $k$  in  $F$  (als  $\mathbb{Q}$ -Algebren) einbetten. Nach Lemma 3.1.a) kann man die Einbettungen  $e : k \hookrightarrow F$  und  $f : F \hookrightarrow M_2(k)$  so annehmen, dass  $f(e(a)) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$  für  $a \in k$ . Speziell ist dann  $U = f(e(i\sqrt{d})) \in f(F)$ .

Nach Lemma 3.1.a) kann man den Automorphismus  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  von  $f(e(k))$  zu einem Automorphismus von  $f(F)$  fortsetzen. Nach Lemma 3.1.b) gibt es also ein  $T \in f(F)^\times$  mit  $TUT^{-1} = -U$ . Man rechnet leicht nach, dass  $T = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$  mit  $b, c \in k^\times$ . Wegen  $bc = -N(T) \in \mathbb{Q}^\times$  gibt es  $t \in \mathbb{Q}^\times$  mit  $c = t\bar{b}$ . Sei  $b = \alpha + \beta i\sqrt{d}$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ . Aus  $\begin{pmatrix} 0 & b\bar{b} \\ t\bar{b}\bar{b} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ t\bar{b} & 0 \end{pmatrix} = (\alpha - \beta U)T \in f(F)$  folgt  $V(t) \in f(F)$ . Da  $U$  und  $V(t)$  die  $\mathbb{Q}$ -Algebra  $F(t)$  erzeugen, ist also  $f(F) = F(t)$ .

- b) Ist eine Primzahl  $p$  in  $\mathfrak{o}$  zerlegt, dann ist  $F$  unverzweigt an der Stelle  $p$ , da  $k$  Zerfällungskörper von  $F$  ist, und man prüft leicht nach, dass  $\left(\frac{t, -d}{p}\right) = 1$  für alle  $t \in \mathbb{Q}^\times$ . Betrachte nun den Fall, dass  $p$  verzweigt oder träge in  $\mathfrak{o}$  ist, mit Primteiler  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}$ . Da  $N(U + W(1)) = 0$ , ist  $F(1)$  keine Divisionsalgebra, also speziell auch unverzweigt an der Stelle  $p$ . Daher ist  $F(t)$  genau dann unverzweigt an der Stelle  $p$ , wenn  $F(t)_p$  und  $F(1)_p$  isomorph sind. Man kann einen Isomorphismus  $j : F(t)_p \rightarrow F(1)_p$  dann so wählen, dass  $j(U) = U$ . Und man kann  $j$  zu einem Automorphismus von  $M_2(k_{\mathfrak{p}})$  fortsetzen, denn eine  $\mathbb{Q}_p$ -Basis von  $F(t)_p$  oder  $F(1)_p$  ist auch  $k_{\mathfrak{p}}$ -Basis von  $M_2(k_{\mathfrak{p}})$ .

$F$  ist also unverzweigt an der Stelle  $p$  genau dann, wenn es  $J \in k_p[U]^\times$  gibt mit  $JV(t)J^{-1} = j(V(t)) \in F(1)_p$ . Das ist genau dann der Fall, wenn es  $a, b \in k_p^\times$  gibt mit  $\begin{pmatrix} 0 & ab^{-1} \\ tba^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1} \in F(1)_p$ , d.h. mit  $tba^{-1} = \overline{ab^{-1}}$  oder gleichwertig  $t = ab^{-1}\overline{ab^{-1}}$ . Das ist genau dann der Fall, wenn  $\left(\frac{t, -d}{p}\right) = 1$ . Diese Argumentation ist auch für die unendliche Stelle von  $\mathbb{Q}$  gültig.

- c) Es gibt  $r \in \mathbb{Q}^+$ , so dass  $tr^2 \in \mathbb{Z}$  quadratfrei ist. Wegen  $\left(\frac{tr^2, -d}{p}\right) = \left(\frac{t, -d}{p}\right)$  für alle Stellen  $p$  von  $\mathbb{Q}$ , haben  $F(tr^2)$  und  $F(t)$  dieselben Verzweigungsstellen, sind also isomorph. Man kann daher  $t \in \mathbb{Z}$  und quadratfrei annehmen. (Ersetze  $t$  durch  $tr^2$ .)

Sei  $g$  der größte gemeinsame Teiler von  $t$  und  $d$ , und sei  $t = gt'$  und  $d = gd'$ . Wegen  $\left(\frac{d+g^2, -d}{p}\right) = 1$  ist  $\left(\frac{t, -d}{p}\right) = \left(\frac{g^2t'(d'+g), -d}{p}\right)$ . Falls  $g > 1$  ist, ersetze man  $t$  durch den quadratfreien Anteil von  $t'(d'+g)$ . Dann ist  $t$  teilerfremd zu  $d$ . Falls  $t$  und  $D$  einen gemeinsamen Teiler  $g' > 1$  haben, ist  $g' = 2$  und  $d \equiv 1 \pmod{4}$ , und man ersetze  $t$  durch den quadratfreien Anteil von  $t(d+1)/4$ . Dann ist  $t$  teilerfremd zu  $D$ .

Falls  $2 \mid d$  und  $t \not\equiv 1 \pmod{4}$ , ist  $d \equiv 2 \pmod{4}$  und  $t \equiv 3 \pmod{4}$ .

In diesem Fall ersetze man schließlich  $t$  durch den quadratfreien Anteil von  $t(d+1)$ .

- d) rechnet man leicht nach.

□

## 5 Spezielle Einbettung von Maximalordnungen

**Definition 5.1.** Sei  $d \in \mathbb{N}$  quadratfrei, und sei  $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$  mit Hauptordnung  $\mathfrak{o}$ . Sei  $F$  eine  $\mathbb{Q}$ -Quaternionenalgebra, und sei  $\mathfrak{M}$  eine  $M_2(k)$ -Maximalordnung.

- a) Für eine Stelle  $p$  von  $\mathbb{Q}$  sei  $\left(\frac{F}{p}\right) := +1$  oder  $-1$ , je nachdem, ob  $F$  an der Stelle  $p$  zerlegt oder verzweigt ist.
- b) Sei  $v(F)$  das Produkt der endlichen Verzweigungsstellen von  $F$ , multipliziert mit  $-1$ , falls  $F$  an der Stelle  $\infty$  verzweigt ist.
- c) Sei  $n(\mathfrak{M}) := N_{k|\mathbb{Q}}(N(\mathfrak{M}M_2(\mathfrak{o})))^{-1}$ .

**Satz 5.2.** Sei  $d \in \mathbb{N}$  quadratfrei, und sei  $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$  mit Hauptordnung  $\mathfrak{o}$  und Diskriminante  $D$ . Seien  $t, F(t), U, V(t), W(t)$  wie in Satz 4.1.

Dann gibt es eine  $F(t)$ -Maximalordnung  $\mathfrak{F}(t)$  und eine  $M_2(k)$ -Maximalordnung  $\mathfrak{M}(t)$  mit  $\mathfrak{F}(t) \subset \mathfrak{M}(t)$ , so dass  $v(F(t))n(\mathfrak{M}(t)) = t|D|$ .



*Beweis.* Man rechnet elementar nach, dass die unten in (i) - (v) definierten  $\mathbb{Z}_p$ -Moduln  $\mathfrak{F}(t)_p$  und  $\mathfrak{o}_p$ -Moduln  $\mathfrak{M}(t)_p$  multiplikativ abgeschlossen sind mit  $\mathfrak{F}(t)_p \subset \mathfrak{M}(t)_p$  für  $p \mid p$ . Man rechnet auch elementar nach, dass  $\mathfrak{F}(t)_p$  die Diskriminante  $\mathbb{Z}_p$  oder  $p^2\mathbb{Z}_p$  hat, je nachdem, ob  $F(t)$  an der Stelle  $p$  zerlegt oder verzweigt ist. An allen endlichen Stellen  $p$  von  $k$  hat  $\mathfrak{M}(t)_p$  die Diskriminante  $\mathfrak{o}_p$ . Also sind  $\mathfrak{F}(t)_p$  und  $\mathfrak{M}(t)_p$  stets Maximalordnungen. Da  $\mathfrak{F}(t)_p = (F(t) \cap M_2(\mathfrak{o}))_p$  bzw.  $\mathfrak{M}(t)_p = M_2(\mathfrak{o})_p$  an fast allen endlichen Stellen, sind  $\mathfrak{F}(t)$  und  $\mathfrak{M}(t)$  wohldefinierte Maximalordnungen mit  $\mathfrak{F}(t) \subset \mathfrak{M}(t)$ , siehe [2, Teil VI, § 11, Satz 23]. Im Folgenden kürzen wir  $v(t) = v(F(t))$  und  $n(t) = n(\mathfrak{M}(t))$  ab. Wir zeigen  $t|D| = v(t)n(t)$  lokal durch Abgleich der Vielfachheit der Primzahl  $p$  in den Termen  $tD$ ,  $v(t)$ ,  $n(t)$ . Schließlich ist  $t|D| < 0$  genau dann, wenn  $t < 0$ , also wenn  $\left(\frac{t, -d}{\infty}\right) = -1$ , d.h. wenn  $F(t)$  an der Stelle  $\infty$  verzweigt ist. Genau dann ist auch  $v(t) < 0$  und  $v(t)n(t) < 0$ .

(i) Falls  $p \neq \infty$  und  $p \nmid tD$ , ist  $\left(\frac{t, -d}{p}\right) = 1$ .

Sei  $\mathfrak{F}(t)_p := (F(t) \cap M_2(\mathfrak{o}))_p$ , und sei  $\mathfrak{M}(t)_p := M_2(\mathfrak{o})_p$  für alle Primteiler  $p$  von  $p$ . Es gilt  $p \nmid tD$  und  $p \nmid v(t)$ . Aus  $N(\mathfrak{M}(t)M_2(\mathfrak{o}))_p = \mathfrak{o}_p$  für alle  $p \mid p$  folgt  $p \nmid n(t)$ .

(ii) Falls  $\left(\frac{t, -d}{p}\right) = 1$  und  $p \mid t$ , ist  $p$  zerlegt in  $\mathfrak{o}$ ,  $p\mathfrak{o} = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ .

- Falls  $p \neq 2$ , sei  $\alpha \in \mathbb{N}$  minimal mit der Eigenschaft  $\alpha^2 \equiv -d \pmod{p}$ , und sei  $\mathfrak{p}$  das von  $p$  und  $\alpha + i\sqrt{d}$  erzeugte Primideal. Sei  $\mathfrak{F}(t)_p$  der  $\mathbb{Z}_p$ -Modul mit Basis  $\{1, U, V(t), (\alpha V(t) + W(t))/p\}$ .
- Falls  $p = 2$ , ist  $d \equiv 7 \pmod{8}$ . Sei  $\mathfrak{p}$  das von 2 und  $(1 + i\sqrt{d})/2$  erzeugte Primideal. Sei  $\mathfrak{F}(t)_p$  der  $\mathbb{Z}_p$ -Modul mit Basis  $\{1, (1 + U)/2, V(t), (V(t) + W(t))/4\}$ .

Sei  $\mathfrak{M}(t)_p := M_2(\mathfrak{o})_p$  und  $\mathfrak{M}(t)_{\bar{p}} := \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \bar{\mathfrak{p}}^{-1} \\ \bar{\mathfrak{p}} & \mathfrak{o} \end{pmatrix}_{\bar{p}}$ .

Es gilt  $p \mid tD$ , aber  $p^2 \nmid tD$  und  $p \nmid v(t)$ .

$N(\mathfrak{M}(t)M_2(\mathfrak{o}))_p = \mathfrak{o}_p$  und  $N(\mathfrak{M}(t)M_2(\mathfrak{o}))_{\bar{p}} = \bar{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{o}_{\bar{p}}$ .

Mit  $N_{k|\mathbb{Q}}(\bar{\mathfrak{p}}) = p$  folgt  $p \mid n(t)$ , aber  $p^2 \nmid n(t)$ .

(iii) Falls  $\left(\frac{t, -d}{p}\right) = 1$  und  $p \mid D$ , ist  $p$  verzweigt in  $\mathfrak{o}$ ,  $p\mathfrak{o} = \mathfrak{p}^2$ .

- Falls  $p \neq 2$ , sei  $\beta \in \mathbb{N}$  minimal mit der Eigenschaft  $\beta^2 \equiv t \pmod{p}$ . Sei  $\mathfrak{F}(t)_p$  der  $\mathbb{Z}_p$ -Modul mit Basis  $\{1, U, V(t), (\beta U + W(t))/p\}$ , und sei  $\mathfrak{M}(t)_p$  der  $\mathfrak{o}_p$ -Modul mit Basis  $\{1, U, V(t), (\beta U + W(t))/p\}$ . Es gilt  $p \mid tD$ , aber  $p^2 \nmid tD$  und  $p \nmid v(t)$ . Mit  $M = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 0 & i\sqrt{d} \end{pmatrix}$  rechnet man leicht nach, dass  $M\mathfrak{M}(t)_pM^{-1} \subset M_2(\mathfrak{o})_p$ . Nach Lemma 3.2.b) ist  $N(\mathfrak{M}(t)M_2(\mathfrak{o}))_p = N(M)^{-1}\mathfrak{o}_p = (\beta i\sqrt{d})^{-1}\mathfrak{o}_p = \mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{o}_p$ . Mit  $N_{k|\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}) = p$  folgt  $p \mid n(t)$ , aber  $p^2 \nmid n(t)$ .

- Falls  $p = 2$  und  $2 \mid d$ , gilt  $t \equiv 1 \pmod{4}$  (Satz 4.1.c), also  $t \equiv 1 \pmod{8}$ .  
Sei  $\mathfrak{F}(t)_p$  der  $\mathbb{Z}_p$ -Modul mit Basis  $\{1, U, (1 + V(t))/2, (U + W(t))/4\}$ ,  
und sei  $\mathfrak{M}(t)_p$  der  $\mathfrak{o}_p$ -Modul mit Basis  $\{1, U, (1 + V(t))/2, (U + W(t))/4\}$ .  
Es gilt  $p^3 \mid tD$ , aber  $p^4 \nmid tD$  und  $p \nmid v(t)$ .  
Mit  $M = \begin{pmatrix} 1 + 2i\sqrt{d} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  gilt  $M\mathfrak{M}(t)_p M^{-1} \subset M_2(\mathfrak{o})_p$ .  
Nach Lemma 3.2.b) ist  $N(\mathfrak{M}(t)M_2(\mathfrak{o}))_p = N(M)^{-1}\mathfrak{o}_p = (2i\sqrt{d})^{-1}\mathfrak{o}_p = \mathfrak{p}^{-3}\mathfrak{o}_p$ ,  
also  $p^3 \mid n(t)$ , aber  $p^4 \nmid n(t)$ .
  - Falls  $p = 2$  und  $d \equiv 1 \pmod{4}$ , ist  $t \equiv 1 \pmod{4}$ .  
Sei  $\mathfrak{F}(t)_p$  der  $\mathbb{Z}_p$ -Modul mit Basis  $\{1, U, (1 + V(t))/2, (U + W(t))/2\}$ ,  
und sei  $\mathfrak{M}(t)_p$  der  $\mathfrak{o}_p$ -Modul mit Basis  $\{1, U, (1 + V(t))/2, (U + W(t))/2\}$ .  
Es gilt  $p^2 \mid tD$ , aber  $p^3 \nmid tD$  und  $p \nmid v(t)$ .  
Mit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  gilt  $M\mathfrak{M}(t)_p M^{-1} \subset M_2(\mathfrak{o})_p$ .  
Nach Lemma 3.2.b) ist  $N(\mathfrak{M}(t)M_2(\mathfrak{o}))_p = N(M)^{-1}\mathfrak{o}_p = 2^{-1}\mathfrak{o}_p = \mathfrak{p}^{-2}\mathfrak{o}_p$ ,  
also  $p^2 \mid n(t)$ , aber  $p^3 \nmid n(t)$ .
- (iv) Falls  $\left(\frac{t, -d}{p}\right) = -1$  und  $p \mid t$ , ist  $p$  träge in  $\mathfrak{o}$ ,  $p\mathfrak{o} = \mathfrak{p}$ .  
Sei  $\mathfrak{F}(t)_p := (F(t) \cap M_2(\mathfrak{o}))_p$ , und sei  $\mathfrak{M}(t)_p := M_2(\mathfrak{o})_p$ .  
Es gilt  $p \mid tD$  und  $p \mid v(t)$ , aber  $p^2 \nmid tD$  und  $p^2 \nmid v(t)$ . Wie in (i) folgt  $p \nmid n(t)$ .
- (v) Falls  $\left(\frac{t, -d}{p}\right) = -1$  und  $p \mid D$ , ist  $p$  verzweigt in  $\mathfrak{o}$ ,  $p\mathfrak{o} = \mathfrak{p}^2$ .
- Falls  $p \neq 2$ , sei  $\mathfrak{F}(t)_p := (F(t) \cap M_2(\mathfrak{o}))_p$ , und sei  $\mathfrak{M}(t)_p := M_2(\mathfrak{o})_p$ .  
Es gilt  $p \mid tD$  und  $p \mid v(t)$ , aber  $p^2 \nmid tD$  und  $p^2 \nmid v(t)$ . Wie in (i) folgt  $p \nmid n(t)$ .
  - Falls  $p = 2$  und  $2 \mid d$ , gilt  $t \equiv 1 \pmod{4}$  (Satz 4.1.c), also  $t \equiv 5 \pmod{8}$ .  
Sei  $\mathfrak{F}(t)_p$  der  $\mathbb{Z}_p$ -Modul mit Basis  $\{1, U, (1 + V(t))/2, (U + W(t))/2\}$ , und  
sei  $\mathfrak{M}(t)_p$  der  $\mathfrak{o}_p$ -Modul mit Basis  $\{1, U/i\sqrt{d}, (1 + V(t))/2, (U + W(t))/2i\sqrt{d}\}$ .  
Es gilt  $p^3 \mid tD$  und  $p \mid v(t)$ , aber  $p^4 \nmid tD$  und  $p^2 \nmid v(t)$ .  
Mit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  gilt  $M\mathfrak{M}(t)_p M^{-1} \subset M_2(\mathfrak{o})_p$ .  
Nach Lemma 3.2.b) ist  $N(\mathfrak{M}(t)M_2(\mathfrak{o}))_p = N(M)^{-1}\mathfrak{o}_p = 2^{-1}\mathfrak{o}_p = \mathfrak{p}^{-2}\mathfrak{o}_p$ ,  
also  $p^2 \mid n(t)$ , aber  $p^3 \nmid n(t)$ .
  - Falls  $p = 2$  und  $d \equiv 1 \pmod{4}$ , ist  $t \equiv 3 \pmod{4}$ . Sei  $\mathfrak{F}(t)_p$  der  $\mathbb{Z}_p$ -Modul mit  
Basis  $\{1, U, V(t), (1 + U + V(t) + W(t))/2\}$ , und sei  $\mathfrak{M}(t)_p$  der  $\mathfrak{o}_p$ -Modul mit  
Basis  $\{1, (1 + U)/(1 + i\sqrt{d}), (1 + V(t))/(1 + i\sqrt{d}), (1 + U + V(t) + W(t))/2\}$ .  
Es gilt  $p^2 \mid tD$  und  $p \mid v(t)$ , aber  $p^3 \nmid tD$  und  $p^2 \nmid v(t)$ .  
Mit  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 + i\sqrt{d} \end{pmatrix}$  gilt  $M\mathfrak{M}(t)_p M^{-1} \subset M_2(\mathfrak{o})_p$ . Nach Lemma 3.2.b) ist  
 $N(\mathfrak{M}(t)M_2(\mathfrak{o}))_p = N(M)^{-1}\mathfrak{o}_p = (1 + i\sqrt{d})^{-1}\mathfrak{o}_p = \mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{o}_p$ ,  
also  $p \mid n(t)$ , aber  $p^2 \nmid n(t)$ .

□

## 6 Typisierung der einbettenden Maximalordnungen

**Satz 6.1.** Sei  $d \in \mathbb{N}$  quadratfrei, und sei  $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$  mit Hauptordnung  $\mathfrak{o}$  und Diskriminante  $D$ . Sei  $F \subset M_2(k)$  eine  $\mathbb{Q}$ -Quaternionenalgebra, und seien  $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$  zwei  $F$ -Maximalordnungen. Seien  $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$  zwei  $M_2(k)$ -Maximalordnungen mit  $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}, \mathfrak{F}' \subset \mathfrak{M}'$ . Dann gibt es  $m \in \mathbb{N}$ , so dass  $N(\mathfrak{M}\mathfrak{M}') = m^{-1}\mathfrak{o}$ .

*Beweis.* Die Behauptung folgt durch Zusammenfügen der folgenden lokalen Ergebnisse.

- (i) Sei  $p$  eine endliche Stelle von  $\mathbb{Q}$ , an der  $F$  zerfällt. Nach Lemma 3.2.a) gibt es Matrizeinheiten in  $F_p$ , bezüglich derer  $\mathfrak{F}_p$  und  $\mathfrak{F}'_p$  die Darstellungen  $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & p^{-r}\mathbb{Z}_p \\ p^r\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$  haben, mit  $r \in \mathbb{N}_0$ . Für  $\mathfrak{p} \mid p$  gilt dann offenbar  $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} & \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \\ \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} & \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix}$  und  $\mathfrak{M}'_{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} & p^{-r}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \\ p^r\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} & \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix}$ . Also gilt  $N(\mathfrak{M}\mathfrak{M}')_{\mathfrak{p}} = N(\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{M}'_{\mathfrak{p}}) = p^{-r}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ . (Ist  $p$  in  $\mathfrak{o}$  zerlegt, folgt das Ergebnis durch Zusammenfügen für die beiden Primteiler von  $p$ .)
- (ii) Sei  $p$  eine endliche Verzweigungsstelle von  $F$ , und sei  $p \nmid D$ . Dann ist  $p$  träge in  $\mathfrak{o}$ ,  $p\mathfrak{o} = \mathfrak{p}$ . Es gibt  $r \in \mathbb{N}_0$ , so dass  $N(\mathfrak{M}\mathfrak{M}')_{\mathfrak{p}} = N(\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{M}'_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}^{-r}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = p^{-r}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ .
- (iii) Sei  $p$  Verzweigungsstelle von  $F$  mit  $p \mid D$ ,  $p\mathfrak{o} = \mathfrak{p}^2$ . Sei  $\pi \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$  Primelement.  $F_p$  ist Divisionsalgebra mit der einzigen Maximalordnung  $\mathfrak{F}_p = \mathfrak{F}'_p$ . Wir zeigen  $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{M}'_{\mathfrak{p}}$ . Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Wir nehmen also an, dass  $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{M}'_{\mathfrak{p}}$ . Nach Lemma 3.2.a) gibt es dann Matrizeinheiten in  $M_2(k_{\mathfrak{p}})$ , bezüglich derer  $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$  und  $\mathfrak{M}'_{\mathfrak{p}}$  die Darstellungen  $\begin{pmatrix} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} & \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \\ \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} & \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} & \pi^{-r}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \\ \pi^r\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} & \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix}$  haben, mit  $r \in \mathbb{N}$ .
  - Sei  $p \neq 2$ .  
Nach Satz 4.1 gibt es  $t \in \mathbb{Q}^{\times}$ , so dass 4.1.c) gilt und  $F$  isomorph zu  $F(t)$  ist. Entsprechend zu  $V(t) \in F(t)$  gibt es dann  $V \in \mathfrak{F}_p \subset \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{M}'_{\mathfrak{p}}$  mit  $V^2 = t$ .  
Wegen  $S(V) = 0$  gibt es  $a, b, c \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$  mit  $V = \begin{pmatrix} a & b \\ \pi c & -a \end{pmatrix}$ . Wegen  $N(V) = -t$  ist  $t = a^2 + \pi bc \equiv a^2 \pmod{\pi}$ . Daraus folgt  $t \in k_{\mathfrak{p}}^{\times(2)}$ . Aber wegen  $\left(\frac{t, -d}{p}\right) = -1$  (siehe Satz 4.1.b) ist  $t \notin \mathbb{Q}_p^{\times(2)}$ , und da  $p$  in  $\mathfrak{o}$  verzweigt ist, auch  $t \notin k_{\mathfrak{p}}^{\times(2)}$ .
  - Sei  $p = 2$ .  
 $F_2$  ist eine (bis auf Isomorphie die einzige)  $\mathbb{Q}_2$ -Divisions-Quaternionenalgebra. Daher gibt es  $A, B \in F_2$  mit  $A^2 = -1$ ,  $B^2 = -1$ ,  $AB = -BA$ . Dann ist  $C = (1 - A - B - AB)/2 \in \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{M}'_{\mathfrak{p}}$ . Wegen  $S(C) = 1$  gibt es  $a, b, c \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$  mit  $C = \begin{pmatrix} a & b \\ \pi c & 1 - a \end{pmatrix}$ . Dann ist  $a(1 - a) = N(C) + \pi bc \equiv 1 \pmod{\pi}$ . Aber da notwendig  $a \equiv 0 \pmod{\pi}$  oder  $a \equiv 1 \pmod{\pi}$ , ist  $a(1 - a) \equiv 0 \pmod{\pi}$ .

□

**Satz 6.2.** Sei  $d \in \mathbb{N}$  quadratfrei, und sei  $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$ . Sei  $F$  eine  $\mathbb{Q}$ -Quaternionenalgebra. Sei  $\mathfrak{F}$  eine  $F$ -Maximalordnung, und sei  $\mathfrak{M}$  eine  $M_2(k)$ -Maximalordnung. Genau dann gibt es eine Einbettung  $f : F \hookrightarrow M_2(k)$  mit  $f(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{M}$ , wenn  $\left(\frac{v(F)n(\mathfrak{M}), -d}{p}\right) = \left(\frac{F}{p}\right)$  für alle Stellen  $p$  von  $\mathbb{Q}$ .

*Beweis.*

- (i) Sei  $f : F \hookrightarrow M_2(k)$  eine Einbettung mit  $f(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{M}$ . Nach Satz 4.1 gibt es  $t \in \mathbb{Q}^\times$ , so dass 4.1.c) gilt und  $F$  isomorph zu  $F(t)$  ist. Nach Satz 5.2 und Satz 4.1.b) ist  $\left(\frac{v(F)n(\mathfrak{M}(t)), -d}{p}\right) = \left(\frac{t|D|, -d}{p}\right) = \left(\frac{F}{p}\right)$  für alle  $p$ . Ein Isomorphismus  $j : f(F) \rightarrow F(t)$  lässt sich zu einem Automorphismus von  $M_2(k)$  fortsetzen, denn eine  $\mathbb{Q}$ -Basis von  $f(F)$  oder  $F(t)$  ist auch  $k$ -Basis von  $M_2(k)$ . Mit den Lemmata 3.3.b) und 3.3.a) folgt  $N(\mathfrak{M}M_2(\mathfrak{o}))N(j(\mathfrak{M})M_2(\mathfrak{o})) \in I^{(2)}H$ .  $j(f(\mathfrak{F}))$  ist  $F(t)$ -Maximalordnung mit  $j(f(\mathfrak{F})) \subset j(\mathfrak{M})$ . Nach Satz 6.1 gibt es  $m \in \mathbb{N}$ , so dass  $N(j(\mathfrak{M})\mathfrak{M}(t)) = m^{-1}\mathfrak{o} \in I^{(2)}H$ . Mit Lemma 3.3.a) folgt  $N(j(\mathfrak{M})M_2(\mathfrak{o}))N(\mathfrak{M}(t)M_2(\mathfrak{o})) \in I^{(2)}H$ , also  $N(\mathfrak{M}M_2(\mathfrak{o}))N(\mathfrak{M}(t)M_2(\mathfrak{o})) \in I^{(2)}H$ . Mit Lemma 3.4 folgt  $\left(\frac{n(\mathfrak{M})n(\mathfrak{M}(t)), -d}{p}\right) = 1$  für alle  $p$ , und also die Behauptung.

- (ii) Sei  $\left(\frac{v(F)n(\mathfrak{M}), -d}{p}\right) = \left(\frac{F}{p}\right)$  für alle Stellen  $p$  von  $\mathbb{Q}$ .

$F$  ist genau an den Stellen  $p$  von  $\mathbb{Q}$  verzweigt, wo  $\left(\frac{v(F)n(\mathfrak{M}), -d}{p}\right) = -1$  ist. Daher haben  $F$  und  $F(v(F)n(\mathfrak{M}))$  die gleichen Verzweigungsstellen, sind also isomorph, siehe Satz 4.1.b) und [2, Teil VII, § 5, Satz 8]. Speziell ist  $k$  Zerfällungskörper von  $F$ . Nach Satz 4.1 gibt es  $t \in \mathbb{Q}^\times$ , so dass 4.1.c) gilt und  $F$  isomorph zu  $F(t)$  ist. Nach Satz 5.2 ist  $\left(\frac{v(F)n(\mathfrak{M}(t)), -d}{p}\right) = \left(\frac{t|D|, -d}{p}\right) = \left(\frac{F}{p}\right)$  für alle  $p$ .

Mit den Lemmata 3.4, 3.3.a) und 3.3.b) folgt, dass  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}(t)$  isomorph sind.

Sei  $e : F \hookrightarrow M_2(k)$  eine Einbettung mit  $e(F) = F(t)$ ,

und sei  $\mathfrak{M}'$  eine  $M_2(k)$ -Maximalordnung mit  $e(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{M}'$ . Nach Satz 6.1 gibt es  $m \in \mathbb{N}$ , so dass  $N(\mathfrak{M}'\mathfrak{M}(t)) = m^{-1}\mathfrak{o} \in I^{(2)}H$ . Mit Lemma 3.3.b) folgt, dass  $\mathfrak{M}'$  und  $\mathfrak{M}(t)$ , also auch  $\mathfrak{M}'$  und  $\mathfrak{M}$  isomorph sind. Ein Isomorphismus  $j : \mathfrak{M}' \rightarrow \mathfrak{M}$  lässt sich auf natürliche Weise zu einem Automorphismus von  $M_2(k)$  fortsetzen.

Sei  $f = joe$ . Dann ist  $f : F \hookrightarrow M_2(k)$  Einbettung mit  $f(\mathfrak{F}) = j(e(\mathfrak{F})) \subset j(\mathfrak{M}') = \mathfrak{M}$ .

□

## 7 Die endlichen Untergruppen der Bianchi-Gruppen

**Satz 7.1.** *Sei  $d \in \mathbb{N}$  quadratfrei, und sei  $k = \mathbb{Q}(i\sqrt{d})$  mit Hauptordnung  $\mathfrak{o}$ .*

- (i)  *$PSL_2(\mathfrak{o})$  enthält genau dann eine 3-Diedergruppe  $\mathcal{D}_3$ , wenn  $p \equiv 1 \pmod{3}$  für alle Primteiler  $p \neq 3$  von  $d$ .*
- (ii)  *$PSL_2(\mathfrak{o})$  enthält genau dann eine Tetraedergruppe  $\mathcal{T}$ , wenn  $p \equiv 1$  oder  $p \equiv 3 \pmod{8}$  für alle Primteiler  $p \neq 2$  von  $d$ .*
- (iii)  *$PSL_2(\mathfrak{o})$  enthält genau dann eine 2-Diedergruppe  $\mathcal{D}_2$ , aber nicht die Tetraedergruppe  $\mathcal{T}$  mit  $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{T} \subset PSL_2(k)$ , wenn  $p \equiv 1 \pmod{4}$  für alle Primteiler  $p \neq 2$  von  $d$ .*

*Beweis.* Für eine  $\mathbb{Q}$ -Quaternionenalgebra  $F$  bezeichne  $\pi : \Gamma(F) \rightarrow P\Gamma(F)$  die kanonische Projektion. Und bezeichne  $\pi : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$  ebenfalls die kanonische Projektion.

- (i) Betrachte zunächst eine 3-Diedergruppe  $\mathcal{D}_3 \subset PSL_2(\mathbb{C})$ .

Dann ist  $\pi^{-1}(\mathcal{D}_3)$  eine binäre 3-Diedergruppe. Sie wird von zwei Elementen  $A, B$  erzeugt, mit  $A^3 = -1$  ( $A^2 - A + 1 = 0$ ),  $B^2 = -1$ ,  $BAB^{-1} = A^{-1}$ , siehe [7, 4.4.7].  $A, B$  erzeugen über  $\mathbb{Q}$  eine Quaternionenalgebra  $F(\mathcal{D}_3)$ , und über  $\mathbb{Z}$  eine Ordnung  $\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3)$  mit Diskriminante  $9\mathbb{Z}$ . Also zerfällt  $F(\mathcal{D}_3)$  an allen Stellen  $p \neq 3, \infty$  von  $\mathbb{Q}$ . Jedes  $M \in F(\mathcal{D}_3)$  ist darstellbar als  $M = \alpha + \beta A + \gamma B + \delta AB$  mit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$ . Falls  $M \neq 0$ , ist  $N(M) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \gamma^2 + \gamma\delta + \delta^2 > 0$ . Daher ist  $F(\mathcal{D}_3)$  Divisionsalgebra. Die Anzahl der Verzweigungsstellen von  $F(\mathcal{D}_3)$  ist gerade (siehe [2, Teil VII, § 5, Satz 9]) und  $> 0$ . Daher ist  $F(\mathcal{D}_3)$  genau an den Stellen 3 und  $\infty$  verzweigt, und  $\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3)$  ist eine  $F(\mathcal{D}_3)$ -Maximalordnung.

Sei nun  $F$  eine  $\mathbb{Q}$ -Quaternionenalgebra, die genau an den Stellen 3,  $\infty$  verzweigt ist. Dadurch ist der Isomorphietyp von  $F$  eindeutig bestimmt. Also gibt es eine 3-Diedergruppe  $\mathcal{D}_3 \subset P\Gamma(F)$ . Sei  $\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3)$  die von  $\pi^{-1}(\mathcal{D}_3)$  erzeugte  $F$ -Maximalordnung. Offenbar gibt es genau dann eine Einbettung  $\mathcal{D}_3 \hookrightarrow PSL_2(\mathfrak{o})$ , d.h. eine Einbettung  $\pi^{-1}(\mathcal{D}_3) \hookrightarrow SL_2(\mathfrak{o})$ , wenn es eine Einbettung  $F \hookrightarrow M_2(k)$  gibt mit  $\mathfrak{F}(\mathcal{D}_3) \hookrightarrow M_2(\mathfrak{o})$ . Nach Satz 6.2 ist das wegen  $v(F) = -3$  und  $n(M_2(\mathfrak{o})) = 1$  genau dann möglich, wenn  $\left(\frac{-3, -d}{p}\right) = 1$  für  $p \neq 3, \infty$  und  $\left(\frac{-3, -d}{p}\right) = -1$  für  $p = 3, \infty$ .

Falls  $p \neq 3, \infty$  und  $p \nmid d$ , ist  $\left(\frac{-3, -d}{p}\right) = 1$ . Betrachte nun den Fall  $p \mid d$ ,  $p \neq 3$ :

Für  $p \neq 2$  ist  $\left(\frac{-3, -d}{p}\right) = \left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) = 1$  genau dann, wenn  $p \equiv 1 \pmod{3}$ .

Für  $p = 2$  ist  $\left(\frac{-3, -d}{p}\right) = \left(\frac{-3, 2}{2}\right) \left(\frac{-3, -d/2}{2}\right) = -1$ .

Die Gleichung für  $p = \infty$  gilt stets, die für  $p = 3$  folgt aus den anderen Gleichungen.

- (ii) Betrachte zunächst eine 2-Diedergruppe  $\mathcal{D}_2 \subset PSL_2(\mathbb{C})$ .

Dann ist  $\pi^{-1}(\mathcal{D}_2)$  eine binäre 2-Diedergruppe. Sie wird von zwei Elementen  $A, B$  erzeugt, mit  $A^2 = -1$ ,  $B^2 = -1$ ,  $BAB^{-1} = A^{-1}$ , siehe [7, 4.4.7].

$\mathcal{D}_2$  ist in genau einer Tetraedergruppe  $\mathcal{T} \subset PSL_2(\mathbb{C})$  enthalten.

Dann ist  $\pi^{-1}(\mathcal{T})$  eine binäre Tetraedergruppe. Sie wird von  $A, B$  wie oben, sowie von einem Element  $C$  erzeugt, mit  $C^3 = -1$ ,  $ACA^{-1} = BC$  und  $CB = AC$ ; und eine elementare Rechnung zeigt, dass  $C = (1 - A - B - AB)/2$ , siehe [7, 4.4.10].

$A, B, C$  erzeugen über  $\mathbb{Q}$  eine Quaternionenalgebra  $F(\mathcal{T}) = F(\mathcal{D}_2)$ , und über  $\mathbb{Z}$  eine Ordnung  $\mathfrak{F}(\mathcal{T})$  mit Diskriminante  $4\mathbb{Z}$ . Also zerfällt  $F(\mathcal{T})$  an allen Stellen  $p \neq 2, \infty$ . Jedes  $M \in F(\mathcal{T})$  ist darstellbar als  $M = \alpha + \beta A + \gamma B + \delta AB$  mit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$ . Falls  $M \neq 0$ , ist  $N(M) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 > 0$ . Daher ist  $F(\mathcal{T})$  Divisionsalgebra. Die Anzahl der Verzweigungsstellen von  $F(\mathcal{T})$  ist gerade und  $> 0$ . Daher ist  $F(\mathcal{T})$  genau an den Stellen 2 und  $\infty$  verzweigt, und  $\mathfrak{F}(\mathcal{T})$  ist eine  $F(\mathcal{T})$ -Maximalordnung.

Sei nun  $F$  eine  $\mathbb{Q}$ -Quaternionenalgebra, die genau an den Stellen 2,  $\infty$  verzweigt ist. Dadurch ist der Isomorphietyp von  $F$  eindeutig bestimmt. Also gibt es eine Tetraedergruppe  $\mathcal{T} \subset P\Gamma(F)$ . Sei  $\mathfrak{F}(\mathcal{T})$  die von  $\pi^{-1}(\mathcal{T})$  erzeugte  $F$ -Maximalordnung. Offenbar gibt es genau dann eine Einbettung  $\mathcal{T} \hookrightarrow PSL_2(\mathfrak{o})$ , d.h. eine Einbettung  $\pi^{-1}(\mathcal{T}) \hookrightarrow SL_2(\mathfrak{o})$ , wenn es eine Einbettung  $F \hookrightarrow M_2(k)$  gibt mit  $\mathfrak{F}(\mathcal{T}) \hookrightarrow M_2(\mathfrak{o})$ . Nach Satz 6.2 ist das wegen  $v(F) = -2$  und  $n(M_2(\mathfrak{o})) = 1$  genau dann möglich, wenn  $\left(\frac{-2, -d}{p}\right) = 1$  für  $p \neq 2, \infty$  und  $\left(\frac{-2, -d}{p}\right) = -1$  für  $p = 2, \infty$ .

Falls  $p \neq 2, \infty$  und  $p \nmid d$ , ist  $\left(\frac{-2, -d}{p}\right) = 1$ . Betrachte nun den Fall  $p \mid d$ ,  $p \neq 2$ :

$$\left(\frac{-2, -d}{p}\right) = \left(\frac{-2}{p}\right) = 1 \text{ genau dann, wenn } p \equiv 1 \text{ oder } p \equiv 3 \pmod{8}.$$

Die Gleichung für  $p = \infty$  gilt stets, die für  $p = 2$  folgt aus den anderen Gleichungen.

- (iii) Wie in (ii) sei  $F$  eine  $\mathbb{Q}$ -Quaternionenalgebra, die genau an den Stellen 2 und  $\infty$  verzweigt ist, Sei  $\mathcal{D}_2 \subset P\Gamma(F)$  eine 2-Diedergruppe, und sei  $\mathcal{T} \subset P\Gamma(F)$  die Tetraedergruppe mit  $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{T}$ .

Betrachte eine  $M_2(k)$ -Maximalordnung  $\mathfrak{M}'$ , für die es eine Einbettung  $\mathcal{D}_2 \hookrightarrow P\Gamma(\mathfrak{M}')$  mit  $\mathcal{T} \not\hookrightarrow P\Gamma(\mathfrak{M}')$ , d.h. eine Einbettung  $\pi^{-1}(\mathcal{D}_2) \hookrightarrow \Gamma(\mathfrak{M}')$  mit  $\pi^{-1}(\mathcal{T}) \not\hookrightarrow \Gamma(\mathfrak{M}')$  gibt. In der Schreibweise der Arbeit [5] ist dies gleichwertig zu  $\mu_2^-(\mathfrak{M}') > 0$ , siehe [5, Definitionen 15.5, 22.2, 24.2]. Nach [5, Satz 26.12] gibt es genau dann eine solche Maximalordnung  $\mathfrak{M}'$ , wenn 2 in  $\mathfrak{o}$  verzweigt ist. Sei im Folgenden also  $2\mathfrak{o} = \mathfrak{p}^2$ .

Sei  $f : F \hookrightarrow M_2(k)$  eine Einbettung. Sei  $\mathfrak{M}$  eine  $M_2(k)$ -Maximalordnung mit  $f(\pi^{-1}(\mathcal{T})) \subset \Gamma(\mathfrak{M})$ , also auch  $f(\mathfrak{F}(\mathcal{T})) \subset \mathfrak{M}$ . Sei  $\mathfrak{M}'$  eine  $M_2(k)$ -Maximalordnung mit  $f(\pi^{-1}(\mathcal{D}_2)) \subset \Gamma(\mathfrak{M}')$ , aber  $f(\pi^{-1}(\mathcal{T})) \not\subset \Gamma(\mathfrak{M}')$ . Nach [5, Satz 26.12] gilt:

- Wenn  $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$  für alle Primteiler  $p \neq 2$  von  $d$ , dann sind  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}'$  isomorph (vom gleichen Maximalordnungstyp).
- Wenn  $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$  für einen Primteiler  $p$  von  $d$ , dann ist  $N(\mathfrak{M}\mathfrak{M}')\mathfrak{p} \in I^{(2)}H$ .

Nach Lemma 3.4 ist  $\mathfrak{p} \in I^{(2)}H$  äquivalent zu  $\left(\frac{2, -d}{p}\right) = 1$  für alle  $p$ .

Dies ist äquivalent zu  $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ , also zu  $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$  für  $p \neq 2, p \mid d$ .  
Daher ist stets  $N(\mathfrak{M}\mathfrak{M}')_{\mathfrak{p}} \in I^{(2)}H$ . Mit den Lemmata 3.3.a) und 3.4 folgt daraus,  
dass  $\left(\frac{2n(\mathfrak{M})n(\mathfrak{M}'), -d}{p}\right) = 1$  für alle  $p$ . Wegen  $f(\mathfrak{F}(\mathcal{T})) \subset \mathfrak{M}$  gilt andererseits  
nach Satz 6.2, dass  $\left(\frac{-2n(\mathfrak{M}), -d}{p}\right) = 1$  für  $p \neq 2, \infty$  und  $= -1$  für  $p = 2, \infty$ .  
Also ist  $\mathcal{D}_2 \hookrightarrow PSL_2(\mathfrak{o})$  mit  $\mathcal{T} \not\hookrightarrow PSL_2(\mathfrak{o})$ , oder gleichwertig dazu  $\mathfrak{M}' = M_2(\mathfrak{o})$   
genau dann möglich, wenn  $\left(\frac{-1, -d}{p}\right) = 1$  für  $p \neq 2, \infty$  und  $= -1$  für  $p = 2, \infty$ .  
Dies ist äquivalent zu  $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ , also zu  $p \equiv 1 \pmod{4}$  für  $p \neq 2, p \mid d$ .

□

## Literatur

- [1] Senon I. Borewicz und Igor R. Šafarevič, *Zahlentheorie*, Aus dem Russischen übersetzt von Helmut Koch. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der Exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Band 32, Birkhäuser Verlag, Basel, 1966. MR0195802 (33 #4000)
- [2] Max Deuring, *Algebren.*, Ergebnisse der Math. 4, Nr. 1, VI + 143 S, 1935.
- [3] Martin Eichler, *Über die Idealklassenzahl hyperkomplexer Systeme*, Math. Z. **43** (1938), no. 1, 481–494, DOI 10.1007/BF01181104. MR1545733
- [4] ———, *Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren*, J. Reine Angew. Math. **195** (1955), 127–151 (1956). MR0080767 (18,297c)
- [5] Norbert Krämer, *Die Konjugationsklassenzahlen der endlichen Untergruppen in der Norm-Eins-Gruppe von Maximalordnungen in Quaternionenalgebren*, Diplomarbeit, Mathematisches Institut, Universität Bonn, 1980. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00628809/>.
- [6] Alexander D. Rahm, *Accessing the Farrell-Tate cohomology of discrete groups* (preprint, arXiv : 1112.4262, HAL : 00618167, 2012).
- [7] Tonny A. Springer, *Invariant theory*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 585, Springer-Verlag, Berlin, 1977. MR0447428 (56 #5740)

*E-Mail:* kraemer\_norbert@t-online.de